

OFDM 中一种有效的基于分段非线性压扩的 PAPR 抑制算法

邢智童¹, 李云¹, 彭德义¹, 张本思¹, 刘凯明², 刘元安²

(1. 重庆邮电大学移动通信技术重庆市重点实验室, 重庆 400065; 2. 北京邮电大学智慧无线移动通信信息技术研究中心, 北京 100876)

摘 要: 针对正交频分复用 (OFDM) 系统中峰均比 (PAPR) 较大的问题, 提出了一种基于通用瑞利和三角分布相结合的分段非线性压扩算法。对于幅度较小的信号, 该算法不对其进行处理。对于幅度较大的信号, 该算法将其幅度对应的概率密度函数从瑞利分布改为三角函数分布。该算法可以在有效降低 OFDM 信号的 PAPR 的前提下, 确保 OFDM 信号样点的误比特率性能和功率谱密度性能。仿真结果表明, 在相同的峰均比限制条件下, 与参考文献的算法相比, 所提算法误比特率更低, 带外泄露功率更低。

关键词: 正交频分复用; 峰均比; 压扩; 信号失真

中图分类号: TP302

文献标识码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2021230

Efficient PAPR reduction algorithm in OFDM based on nonlinear piecewise companding

XING Zhitong¹, LI Yun¹, PENG Deyi¹, ZHANG Benshi¹, LIU Kaiming², LIU Yuan'an²

1. Chongqing Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China

2. Institute of Smart Wireless Information Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China

Abstract: Focusing on the high peak-to-average power ratio (PAPR) problem in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) systems, a generalized hybrid of rayleigh and sine distribution based nonlinear companding algorithm for PAPR reduction in OFDM systems was provided. For the proposed algorithm, signal samples with small amplitudes remain unchanged. For the signal samples with large amplitudes, their probability density function were changed from rayleigh distribution to sine-based distribution. The proposed algorithm can effectively reduce the PAPR, and at the same time, maintain the bit error rate performance and power spectral density performance. Simulation results indicate that with the same PAPR performance, compared with referred companding schemes, the proposed algorithm has lower bit error rate and out of band radiation.

Keywords: OFDM, PAPR, companding, signal distortion

1 引言

正交频分复用 (OFDM, orthogonal frequency division multiplexing) 在 5G/B5G/6G 等现代和未来通信系统中有着良好的应用前景^[1]。然而, OFDM 系统的一个较大的缺陷是它的峰均比 (PAPR, peak-to-average power ratio) 较高。较高的 PAPR 使

OFDM 信号样点在经过了功率放大器以后, 面临较大的非线性失真; 同时使 OFDM 信号样点在经过了非线性功率放大器以后, 面临较大的误比特率 (BER, bit error rate)。因而, 研究 OFDM 系统的 PAPR 抑制是一个十分重要的问题。在 5G/B5G/6G 等现代和未来通信的场景下, PAPR 的抑制变得更加重要。一方面, 随着毫米波^[2]的引入, 5G/B5G/6G

收稿日期: 2021-10-20; 修回日期: 2021-11-30

通信作者: 李云, liyun@cqupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.62771077, No.61671096)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (No.62771077, No.61671096)

通信的传输会使用更多的子载波数目,从而进一步加大 OFDM 系统的 PAPR。另一方面,在 5G/B5G/6G 通信的传输中,基站能耗较大的问题依旧存在^[3],这导致如果 OFDM 信号样点的 PAPR 过高,则必须进行一定的功率回退^[4],这将大大降低功率放大器的效率。故而,在面向 5G/B5G/6G 等现代和未来的宽带无线通信系统中,降低 PAPR、提高功率放大器效率的需求同样迫切。

为了降低 OFDM 系统的 PAPR,目前已有大量的文献研究,这些 PAPR 抑制算法大致可以分为三大类^[5]。1) 以降低大幅度信号出现的概率为主体的概率类算法,如选择映射序列、部分传输序列等算法。2) 以编码技术为主体的算法,在这类算法中,信道编码技术,如卷积码、线性分组码、polar 码等被用于降低 OFDM 系统的 PAPR。3) 以信号预失真为主的压扩类算法,这类算法不改变 OFDM 信号样点的相位,并使用相应的函数对 OFDM 信号样点的幅度进行改变,从而抑制 OFDM 系统的 PAPR。这类算法包括限幅法^[6]、线性压扩算法^[7-11]和非线性压扩算法^[12-22]。

在以上 PAPR 抑制算法中,非线性压扩算法是一项非常有竞争力的算法,它们能够在 PAPR 性能和功率频谱密度(PSD, power spectral density)性能之间实现平衡。

非线性压扩算法的一种思路是先将压扩后 OFDM 信号样点的幅度满足的概率密度函数(PDF, probability density function)从瑞利分布改为一个有限概率分布,这样可以抑制压扩后 OFDM 信号样点幅度的最大值。一般而言,将压扩后 OFDM 信号样点幅度的最大值称为压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 的限幅点。在压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF 的参数设计中,需要确保 PDF 的积分为 1 以及压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等这 2 个条件。文献[12]不对幅度较小的信号进行压扩处理,对幅度较大的信号,将压扩后信号样点幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为一个 PAPR 较低的有限的 PDF。该算法可以在有效降低 OFDM 信号样点的 PAPR 的前提下,确保压扩函数失真较低,从而确保压扩后 OFDM 信号样点的 BER 性能和 PSD 性能。然而,文献[12]提出的算法由于强制要求压扩后 OFDM 信号样点的概率分布密度函数在限幅点处的值为 0,将影响压扩函数设计的灵活性。文献[13]提出了指数压扩(EC, exponential com-

panding)算法。它将压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF 从瑞利分布改为均匀分布。该算法可以降低 OFDM 信号样点的 PAPR,并同时保证压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等。然而,该方法会对 OFDM 信号样点产生较大的压扩失真,从而影响压扩后 OFDM 信号样点的 BER 性能和 PSD 性能。然而,文献[13]在设计压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF 时,对大幅度的信号和小幅度的信号都进行了处理,这将在一定程度上产生不必要的压扩,从而提高压扩失真。文献[14]提出了一种基于瑞利分布和均匀分布相结合的分段非线性压扩算法。该算法不改变小信号样点的幅度,对于大幅度的信号,该算法将其压扩后对应的 PDF 从瑞利分布改为均匀分布。文献[15]中的 Wangs 算法不对幅度较小的信号进行处理,对于幅度较大的信号,将压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为线性分布。文献[16]提出了一种基于平方根倒数结构(ISQR, inverse square root component)的分段非线性压扩算法。该算法不改变幅度较小的信号,对于幅度较大的信号,该算法将压扩后 OFDM 信号样点的幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为平方根倒数的分布。文献[17]提出了 Perturbed 算法,该算法将压扩后 OFDM 信号样点的幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为分段线性分布,这些分段线性函数可以良好地拟合瑞利分布函数。然后,在实际的传输中,还将对这些分段线性函数进行适当的扰动,以寻找最优的分段拟合函数。文献[18]设计了分段非线性压扩函数。该压扩函数不对幅度较小的信号进行压扩,对于幅度较大的信号,该压扩函数将压扩后 OFDM 信号样点的概率分布密度函数从瑞利分布改为经过伸缩变换的瑞利分布,使压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 是一个有限分布,且具有较低的失真。文献[19]将小幅度信号和大幅度信号分段进行处理,对于幅度较小的信号,将压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 从瑞利分布改为一个经过伸缩变换的瑞利分布函数;对于幅度较大的信号,将压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 从瑞利分布改为线性分布。

非线性压扩算法的另一种思路是直接设计非线性压扩函数。文献[20]提出了 μ 律压扩算法。然而,该压扩算法会提高 OFDM 信号样点的平均功率,从而对 OFDM 信号样点的 PAPR 抑制效果产生影响。文献[21]设计了限幅压扩(ALC, amplitude

limited companding) 多项式的算法, 抑制压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR。文献[22]设计了分段非线性压扩函数降低 OFDM 系统的 PAPR。该算法不改变小幅度信号的幅度, 对于大幅度信号, 使用限幅的算法, 使压扩后 OFDM 信号样点的最大幅度不超过一个固定的值; 对于中等幅度的信号, 使用多项式函数对 OFDM 信号样点进行压扩, 弥补因为限幅导致的损失。

目前, 压扩算法设计存在的问题是算法本身很难在 PAPR 性能、BER 性能和计算复杂度之间达到平衡。因而, 如何设计一种压扩算法, 使压扩后 OFDM 信号样点在确保低 PAPR 传输的前提下, 仍然保证较低的 BER 是基于压扩变换的 OFDM 系统的 PAPR 抑制算法设计中十分重要的研究课题。

本文设计了一种基于通用瑞利和三角分布相结合的分段非线性压扩 (GHRSDNC, generalized hybrid of rayleigh and sine distribution based nonlinear companding) 算法。该算法不对小幅度信号进行压扩处理, 对于大幅度的信号, 该算法将压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为三角函数分布。该算法在设计完压扩函数后, 通过求解概率守恒以及压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等这 2 个约束条件, 求解出对应的压扩函数的参数的解析解。考虑到三角函数分布的图像在形状上与瑞利分布函数的图像接近, 该压扩算法可以确保较低的压扩失真。此外, 该压扩算法还可以通过灵活地调整参数, 确保压扩算法在 PAPR 和 BER 之间达成平衡。本文相比于其他算法, 如文献[12]的算法, 更具有通用性。

2 基于压扩变换 OFDM 系统模型

基于压扩变换的 OFDM 系统的结构如图 1 所示。在 OFDM 系统中, 宽带信号被划分为 N 个不

同的子载波。经过正交移相键控 (QPSK, quadrature phase shift keying) 或者正交振幅调制 (QAM, quadrature amplitude modulation) 后的信号独立地传输于每一个子载波上。假设第 k 个子载波 ($0 \leq k \leq N-1$) 上的信号为 X_k , 则 OFDM 系统对这 N 路子载波上的数据进行快速傅里叶逆变换 (IFFT, inverse fast Fourier transform) 处理。在输出端, 第 n 个 ($0 \leq n \leq N-1$) 子载波上的信号为

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \quad (1)$$

OFDM 信号的峰均比被定义为 N 个输出信号中, 峰值信号和平均信号功率的比值, 记作

$$\text{PAPR}_{|x_n|} = \frac{\max_{0 \leq n \leq N-1} |x_n|^2}{E(|x_n|^2)} \quad (2)$$

由中心极限定理可知, 当子载波数目 N 足够大时, OFDM 时域信号样点 x_n 满足正态分布。相应地, 时域信号样点 x_n 的幅度 $|x_n|$ 满足的 PDF 为瑞利分布, 记作

$$f_{|x_n|}(x) = \frac{2x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (3)$$

其中, σ^2 表示的是 OFDM 信号样点的平均功率。相应地, 瑞利分布函数的 PDF 对应的累计分布函数 (CDF, cumulative distribution function) 为

$$F_{|x_n|}(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad (4)$$

如果使用压扩算法抑制 OFDM 信号样点的 PAPR, 一种常见的思路为将压扩后 OFDM 信号样点的概率分布从瑞利分布改为一个 PAPR 较低的 PDF, 然后根据压扩后的概率分布, 推导出对应的压扩函数的表达式。假设压扩后 OFDM 信号样点幅

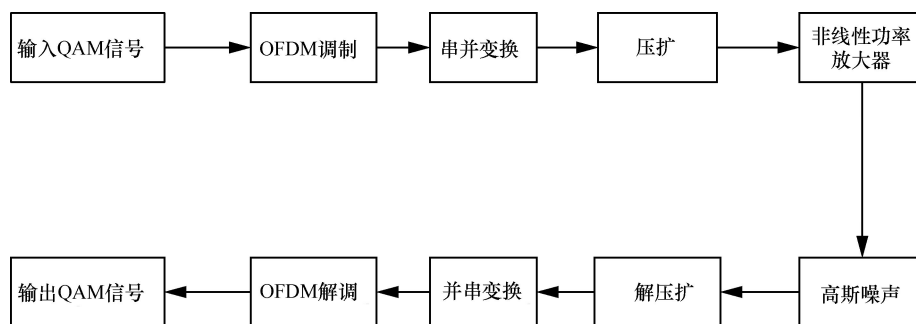


图 1 基于压扩变换的 OFDM 系统的结构

度满足的 PDF 为 $f_{|y_n|}(x)$, 对应的 CDF 为 $F_{|y_n|}(x)$,

则对应的压扩函数的表达式为

$$y_n = C(x_n) = \text{sign}(x_n) F_{|y_n|}^{(-1)} \left[F_{|x_n|}(|x_n|) \right] \quad (5)$$

3 分段非线性压扩算法

压扩函数的设计基于将压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 从瑞利分布改为一个 PAPR 较低的 PDF, 然后根据压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的概率分布, 推导出压扩函数。

在压扩函数的设计中, 假设压扩后的信号样点为 y_n , 压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF 为 $f_{|y_n|}(x)$ 。考虑到压扩函数的设计需要避免不必要的压扩, 以避免产生额外的复杂度和额外的失真。故而, 考虑对于幅度较小的信号, 不进行压扩处理; 对于幅度较大的信号, 压扩函数需要有效降低 PAPR, 同时不产生过高的失真。故而, 压扩后 OFDM 信号样点的幅度满足的 PDF 的形状需要与原始的瑞利分布函数的形状相接近。

3.1 分段非线性压扩函数设计

本文算法考虑将压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF $f_{|y_n|}(x)$ 设计为分段函数, 并将分段点设定为 $c\sigma$ 。且 $f_{|y_n|}(x)$ 为有限概率分布, 并将压扩后 OFDM 信号样点 y_n 的幅度 $|y_n|$ 满足的 PDF 的最大值称为 $f_{|y_n|}(x)$ 的限幅点, 设定为 A 。一方面, 为避免不必要的压扩, 考虑对幅度较小的信号, 不进行压扩处理, 即当压扩后 OFDM 信号样点的幅度位于区间 $[0, c\sigma]$ 时, 压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF $f_{|y_n|}(x)$ 与原始 OFDM 信号样点的幅度满足的 PDF $f_{|x_n|}(x)$ 相同。另一方面, 当压扩后 OFDM 信号样点的幅度位于区间 $(c\sigma, A]$ 时, 压扩后 OFDM 信号样点幅度的 PDF $f_{|y_n|}(x)$ 为一个新的满足低 PAPR 的函数, 记作 $g(x)$ 。此时, 压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 可以记作

$$f_{|y_n|}(x) = \begin{cases} f_{|x_n|}(x), & 0 \leq x \leq c\sigma \\ g(x), & c\sigma < x \leq A \end{cases} \quad (6)$$

为了确保压扩后 OFDM 信号样点的 PSD 性能, 要求压扩函数具备连续性, 即压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 为连续函数, 即 $f_{|y_n|}(x)$ 是连续函数, 它需要在分段点 $x=c\sigma$ 处连续。此时, 可以得到

$$g(c\sigma) = f_{|x_n|}(c\sigma) \quad (7)$$

为了降低压扩失真, 函数 $g(x)$ 需要尽可能接近原始的瑞利分布函数。考虑将 $g(x)$ 设定为三角函数, 记作

$$g(x) = \frac{2c}{\sigma} e^{-c^2} \sin \left[\frac{\pi(x+b\sigma)}{2(c+b)\sigma} \right] \quad (8)$$

其中, b 是形状因子, 负责控制三角函数的形状。使用三角函数是一种非常好的选择, 一方面, 三角函数在形状上与瑞利分布函数足够接近。这对于降低压扩失真非常有效。另一方面, 三角函数的表达式十分简洁, 容易推导出压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 对应的 CDF $F_{|y_n|}(x)$, 最终利于推导压扩函数的表达式。由于 $g(x)$ 是 PDF, 故而, 在区间 $x \in [c\sigma, A]$ 中, $g(x)$ 需要满足

$$g(x) \geq 0 \quad (9)$$

此时, 得出结论

$$A \leq (2c+b)\sigma \quad (10)$$

进一步, 为了让分段函数有意义, 要求

$$A > c\sigma \quad (11)$$

此时, 将限幅值 A 重新写作

$$A = 2(c+b)\varepsilon\sigma - b\sigma \quad (12)$$

故而, 可以得出结论

$$\frac{1}{2} < \varepsilon \leq 1 \quad (13)$$

使用该压扩算法时, 压扩后 OFDM 信号样点的最大理论 PAPR 为

$$\text{PAPR}_{\max} = 10 \lg \frac{[2(c+b)\varepsilon\sigma - b\sigma]^2}{\sigma^2} = 10 \lg [2(c+b)\varepsilon - b]^2 \quad (14)$$

此时, 可以得到设计的压扩函数在压扩后 OFDM 信号样点满足的 PDF 为

$$f_{|y_n|}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, & 0 \leq x \leq c\sigma \\ \frac{2c}{\sigma} e^{-c^2} P(x), & c\sigma < x \leq 2(c+b)\varepsilon\sigma - b\sigma \end{cases} \quad (15)$$

其中,

$$P(x) = \sin \left[\frac{\pi(x+b\sigma)}{2(b+c)\sigma} \right] \quad (16)$$

压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 对应的 CDF 为

$$F_{|y_n|}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}, & 0 \leq x \leq c\sigma \\ 1 - e^{-c^2} - T(x), & c\sigma < x \leq 2(c+b)\varepsilon\sigma - b\sigma \\ 1, & x > 2(c+b)\varepsilon\sigma - b\sigma \end{cases} \quad (17)$$

其中,

$$T(x) = 2ce^{-c^2} \frac{2(c+b)}{\pi} \cos \left[\frac{\pi(x+b\sigma)}{2(b+c)\sigma} \right] \quad (18)$$

压扩后 OFDM 样点幅度满足的 PDF 对应的 CDF $F_{|y_n|}(x)$ 的反函数为

$$F_{|y_n|}^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{-\sigma^2 \ln(1-x)} & , 0 \leq x \leq 1 - e^{-c^2} \\ \frac{2(b+c)\sigma Q(x) - \pi b\sigma}{\pi} & , 1 - e^{-c^2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (19)$$

其中,

$$Q(x) = \arccos \left[\frac{\sigma^2 \pi e^{c^2} (1 - e^{-c^2} - x)}{4c(b+c)\sigma} \right] \quad (20)$$

将式(19)和式(20)代入式(5), 可以得到对应的压扩函数为

$$C(x_n) = \text{sign}(x_n) F_{|y_n|}^{-1} \left[F_{|x_n|}(|x_n|) \right] = \text{sign}(x_n) \begin{cases} |x_n|, & 0 \leq |x_n| \leq c\sigma \\ R(x), & c\sigma < |x_n| \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$R(x) = \frac{2(b+c)\sigma Q \left[F_{|x_n|}(|x_n|) \right] - \pi b\sigma}{\pi} \quad (22)$$

3.2 压扩函数参数推导

在压扩函数的参数中, 给定任意的满足式(13)的 ε , 通过求解二元方程组求解对应的参数 c 和 b . 参数 c 和 b 需要满足 2 个条件, 一个条件是参数 c 和 b 需要满足 CDF 的定义, 即 $F_{|y_n|}[(2c+b)\sigma] = 1$.

此时, 可以得到

$$1 - e^{-c^2} - 2ce^{-c^2} \frac{2(c+b)}{\pi} \cos(\pi\varepsilon) = 1 \quad (23)$$

通过对式(23)进行化简, 可以得到

$$b+c = -\frac{\pi}{4c \cos(\pi\varepsilon)} \quad (24)$$

进一步, 假设 $\cos(\pi\varepsilon) = t$, 则式(24)可以被改写为

$$b+c = -\frac{\pi}{4ct} \quad (25)$$

参数 c 和 b 需要满足的另一个条件为压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等, 即

$$E(|y_n|^2) = \int_0^{(2c+b)\sigma} x^2 f_y(x) dx = \sigma^2 \quad (26)$$

将式(25)和式(26)进行联立, 可以求解出对应的压扩参数 c 和 b . 首先, 将式(26)进行展开, 可以得到

$$\left[1 - (1+c^2)e^{-c^2} \right] \sigma^2 + \frac{4c(b+c)e^{-c^2} \sigma T(\varepsilon)}{\pi^3} = \sigma^2 \quad (27)$$

其中,

$$T(\varepsilon) = -4c(b+c)\pi\sigma + \left[8(b+c)^2 - \pi^2(b-2(b+c)\varepsilon)^2 \right] \sigma \cos(\pi\varepsilon) + 4(b+c)\pi[-b\sigma + 2(b+c)\varepsilon\sigma] \sin(\pi\varepsilon) \quad (28)$$

将 $\cos(\pi\varepsilon) = t$ 代入式(28)中, 并进行化简, 可以得到

$$-1 - c^2 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2c^2t^2} + b^2 + \frac{b\pi\varepsilon}{ct} + \frac{\pi^2\varepsilon^2}{4c^2t^2} - \left(\frac{b}{ct^2} + \frac{\pi}{2c^2t^3}\varepsilon \right) \sqrt{1-t^2} = 0 \quad (29)$$

将式(25)中的 b 和 c 的关系代入式(29)中, 可以得到

$$-1 - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{2c^2t^2} + \frac{\pi^2}{16c^2t^2} + \frac{\pi}{2t} - \frac{\pi^2\varepsilon}{4c^2t^2} - \frac{\pi\varepsilon}{t} + \frac{\pi^2\varepsilon^2}{4c^2t^2} + \left(\frac{\pi}{4c^2t^3} + \frac{1}{t^2} - \frac{\pi}{2c^2t^3}\varepsilon \right) \sqrt{1-t^2} = 0 \quad (30)$$

此时, 通过化简式(30), 可以得到

$$-16c^2t^3 - 16c^2t - 8t + \pi^2t + 8\pi c^2t^2 - 4\pi^2\varepsilon t - 16\pi\varepsilon c^2t^2 + 4\pi^2\varepsilon^2t + (4\pi + 16c^2t - 8\pi\varepsilon) \sqrt{1-t^2} = 0 \quad (31)$$

通过求解式(31)中的关于 c 的一元二次方程,

可以得到

$$c^2 = \frac{(8\pi\varepsilon - 4\pi)\sqrt{1-t^2} - 4\pi^2\varepsilon^2t + 4\pi^2\varepsilon t - \pi^2t + 8t}{-16t^3 - 16t + 8\pi t^2 - 16\pi\varepsilon t^2 + 16t\sqrt{1-t^2}} \quad (32)$$

假设

$$M = \frac{(8\pi\varepsilon - 4\pi)\sqrt{1-t^2} - 4\pi^2\varepsilon^2t + 4\pi^2\varepsilon t - \pi^2t + 8t}{-16t^3 - 16t + 8\pi t^2 - 16\pi\varepsilon t^2 + 16t\sqrt{1-t^2}} \quad (33)$$

此时, 可以得到

$$c = \sqrt{M} \quad (34)$$

图 2 展示了参数 ε 与 PAPR 的关系。通过图 2 可以看出, 随着参数 ε 的增大, 压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR 逐渐增大。该压扩算法可以通过灵活调整参数, 使压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR 位于 4.25~6.15 dB。

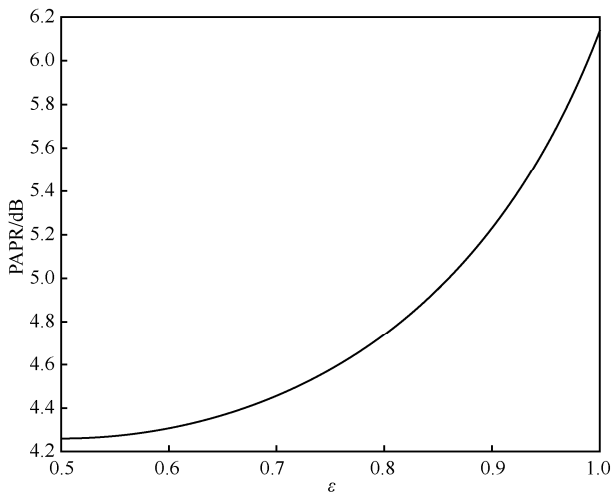


图 2 参数 ε 与 PAPR 的关系

图 3 展示了不同的参数 ε 对应的压扩后 OFDM 信号样点的 PDF。通过图 3 可以看出, 一方面, 压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 在形状上与瑞利分布函数相接近。另一方面, 随着参数 ε 的增大, 压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 的形状与原始的瑞利分布函数的形状越来越接近, 且压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 的限幅点越接近零点。

图 4 展示了不同的参数 ε 和对应的压扩函数。通过图 4 可以看出, 当信号的幅度较小时, 压扩函数的图像与不进行压扩处理的过原点的直线十分接近。随着信号幅度的增大, 压扩函数的曲线缓慢增加至一个固定的值。这确保压扩后 OFDM 信号样点的最大幅度不超过一个固定的值, 并且确保较低的带外泄露。

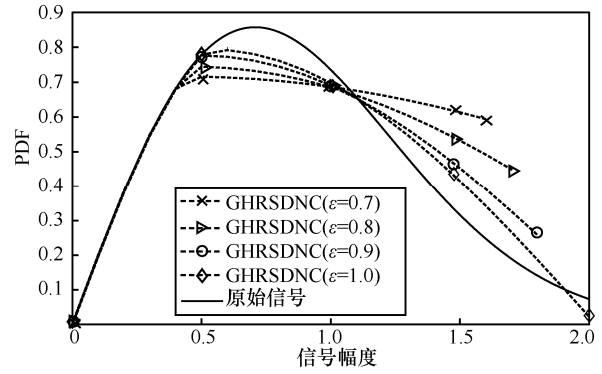


图 3 不同的参数 ε 对应的 PDF

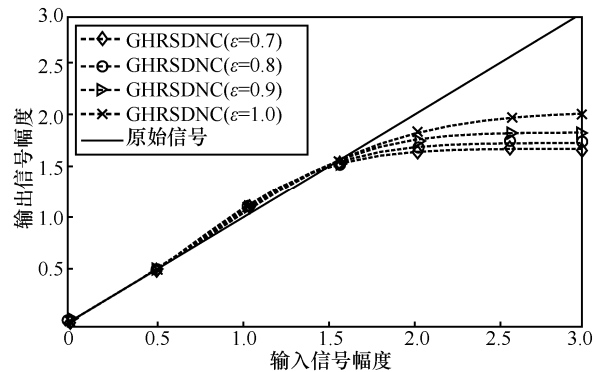


图 4 不同的参数 ε 对应的压扩函数

通过图 2~图 4 可以看出, 压扩函数的参数 ε 对压扩函数的设计至关重要。压扩函数的参数 ε 控制着压扩后 OFDM 信号样点幅度对应的 PDF 的形状, 以及压扩后 OFDM 信号样点的最大幅度值。一方面, 当 ε 的值增大时, 压扩后 OFDM 信号样点幅度满足的 PDF 更接近原点, 从而 PDF 失真更少, 但是, 相应地, 压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR 也会更大; 另一方面, 当 ε 的值减小时, 压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR 更小, 但是, 对应的 PDF 的失真也更大。

图 5 展示了不同压扩函数的对比, 对比的压扩函数包括 Wangs 算法^[15]、ISQR 算法^[16]、EC 算法^[13]和 ALC 算法^[21]中的函数。在整体的仿真中, OFDM 信号样点的平均功率被归一化为 $1.0 \pi \text{ rad/sample}$ 。在对比的 Wangs 算法中, c 表示分段点的值, A 表示限幅点的值; 在对比的 ISQR 算法中, c 表示分段点的值; 在对比的 EC 算法中, d 表示压扩后 OFDM 信号样点幅度的 d 次幂; 在对比的 ALC 算法中, M 表示限幅因子, s 表示曲线的弯曲因子, v 表示输入信号的缩放因子。

通过图 5 可以看出, 与 EC 算法和 ALC 算法中的函数相比, 由于没有对幅度较小的信号进行压

扩, 本文压扩函数在幅度较小的部分, 与原始的过原点的直线几乎重合。对于幅度较大的信号的部分, 该压扩函数的图像缓慢地趋近于限幅值, 这有助于提升压扩函数的 PSD 性能。

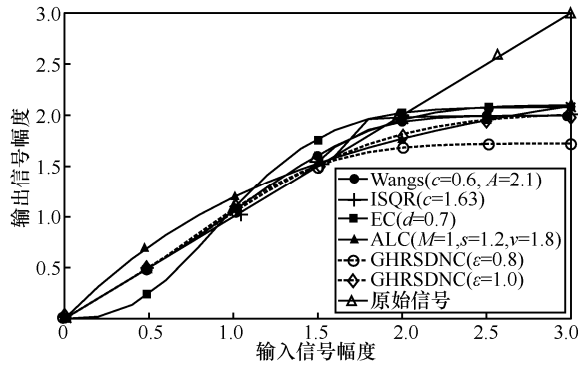


图5 不同压扩函数的对比

3.3 参数松弛方法

通过图2可以看出, ϵ 的值从0.5变到1.0时, PAPR的变化范围为4.21~6.15 dB。为了提高压扩算法的灵活性, 提升压扩后 OFDM 信号样点的 PAPR 的变化范围, 考虑将式(26)中的压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等的约束改为压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率大约相等的约束, 即

$$E(|y_n|^2) = \int_0^{(2c+b)\sigma} x^2 f_y(x) dx \approx \sigma^2 \quad (35)$$

参考式(26), 可以把式(35)展开为

$$\left[1 - (1+c^2)e^{-c^2}\right]\sigma^2 + \frac{4c(b+c)e^{-c^2}\sigma T(\epsilon)}{\pi^3} \approx \sigma^2 \quad (36)$$

式(36)可被改写为

$$F\sigma^2 \approx \sigma^2 \quad (37)$$

其中,

$$F = \left[1 - (1+c^2)e^{-c^2}\right] - \frac{e^{-c^2}G(\epsilon)}{\cos(\pi\epsilon)\pi^2} \quad (38)$$

其中,

$$G(\epsilon) = -4c(b+c)\pi + \left[8(b+c)^2 - \pi^2(b-2(b+c)\epsilon)^2\right]\cos(\pi\epsilon) + 4(b+c)\pi[-b+2(b+c)\epsilon]\sin(\pi\epsilon) \quad (39)$$

图6展示了 c 和 F 的关系。通过图6可以看出, 随着 c 的增大, F 的值逐渐趋近于1。且无论 ϵ 的值取多少, 当 $c \geq 2$ 时, F 的值都可以近似趋近于1。

对任意的 ϵ , 除了求解出精确的 c 和 b 的值以外, 当 $c \geq 2$ 时, 都可以认为压扩函数的参数满足压扩后和压扩前 OFDM 信号样点的平均功率相等。

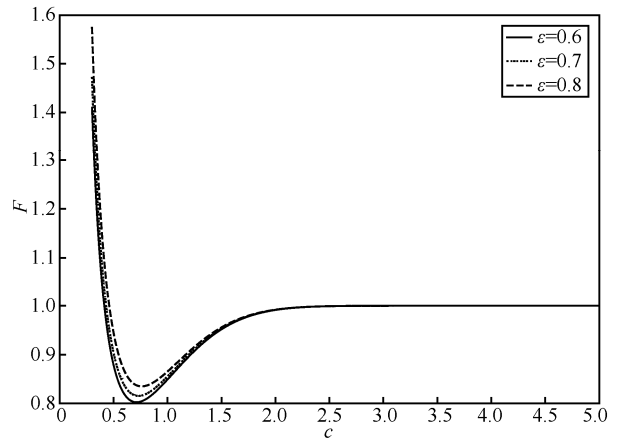


图6 c 和 F 的关系

图7展示了当 $c \geq 2$ 时, 参数 c 、 ϵ 和 PAPR 的关系。从图7可以看出, 当 c 固定时, 随着 ϵ 的增大, PAPR 逐渐增大。当 ϵ 固定时, 随着 c 的增大, PAPR 逐渐增大。因而, 该参数松弛的方法进一步扩大了 PAPR 的范围, 提升了参数设计的灵活性。

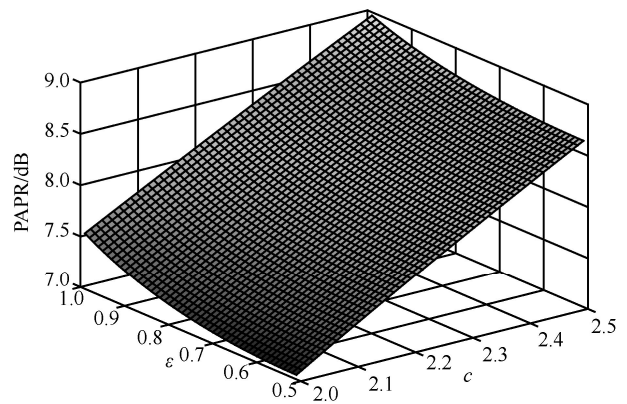


图7 当 $c \geq 2$ 时, c 、 ϵ 和 PAPR 的关系

3.4 压扩算法流程设计

算法1展示了设计的压扩算法的发送端算法流程。该压扩算法可以分为两大部分。在第一部分中, 基于预设的参数 ϵ 的值和 OFDM 输入信号样点的平均功率 σ^2 , 求解参数 c 和参数 b 的值。在第二部分中, 当输入的信号序列的幅度小于给定的值 $c\sigma$ 时, 压扩后 OFDM 信号样点的幅度与压扩前相等。当输入的信号序列的幅度大于给定的值 $c\sigma$ 时, 将使用压扩函数对输入信号序列进行处理。通过算法1可

以看出，在发送端，压扩算法需要存储预设的 ε 的值、总的子载波数目 N 和发送信号的平均功率 σ^2 。

算法 1 GHRSDNC 压扩算法流程

输入 预设 ε 的值、OFDM 的子载波数目 N 、OFDM 的原始的发送信号序列 $x[i]$ 和原始的 OFDM 信号样点的平均功率 σ^2

输出 压扩后的 OFDM 信号样点序列 y_n

1) 预设主要参数：根据式(24)和式(26)求解参数 c 和 b 的值

2) 压扩运算处理：

for $i=1:N$

if $|x[i]| \leq c\sigma$

$y[i]=x[i]$

else

$y[i]=\text{sign}(x[i])C(|x[i]|)$

end if

end for

3) 输出 return $y[i]$

4 仿真分析

为了验证本文压扩算法在 PAPR、BER、PSD 等方面的性能，本节对设计的压扩算法进行相应的仿真分析。在仿真时，选取 OFDM 系统的子载波数目为 256，采用 4 倍过采样，并选取总的 OFDM 的符号数为 100。在整体仿真时，OFDM 信号样点的平均功率被归一化为 $1.0 \pi \text{ rad/sample}$ 。本文压扩算法与 EC 算法^[13]、ISQR 算法^[16]、Wangs 算法^[15]和 ALC 算法^[21]进行比较。在 BER 性能的仿真中，还将验证 OFDM 信号样点在经过了固态功率放大器 (SSPA, solid state power amplifier) 以后的 BER 性能。压扩后 OFDM 的信号样点在经过 SSPA 后的模型为

$$z_n = \text{sign}(y_n) \frac{|y_n|}{\left[1 + \left(\frac{|y_n|}{A_{\text{sat}}}\right)^{2p}\right]^{\frac{1}{2p}}} \quad (40)$$

其中， A_{sat} 为功率放大器的饱和因子，在本次仿真中， $A_{\text{sat}}=1.5$ ； p 为控制功率放大器的形状的因子，在本次仿真中， $p=2.0$ 。

图 8 展示了不同压扩算法的 PAPR 的互补累积分布函数 (CCDF, complementary cumulative distribution function)。从图 8 可以看出，设计的压扩函数的 PAPR 的 CCDF 曲线下坠迅速。特别

地，在 $\text{CCDF}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，设计的压扩算法在 $\varepsilon=0.6$ 时，对应的 PAPR 大约为 4.5 dB；在 $\varepsilon=0.8$ 时，对应的 PAPR 大约为 5.0 dB；在 $\varepsilon=1.0$ 时，对应的 PAPR 大约为 6.3 dB。

图 9 展示了不同压扩算法的 BER 性能。从图 9 可以看出，当 $\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\varepsilon=0.6$ 时，需要的最低的 E_b/N_0 大约为 9.3 dB，比 EC 算法低 0.2 dB，比 ALC 算法低 0.7 dB。当 $\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\varepsilon=0.8$ 时，需要的最低的 E_b/N_0 大约为 9.0 dB，比 EC 算法大约低 0.5 dB，比 ALC 算法大约低 1.0 dB。

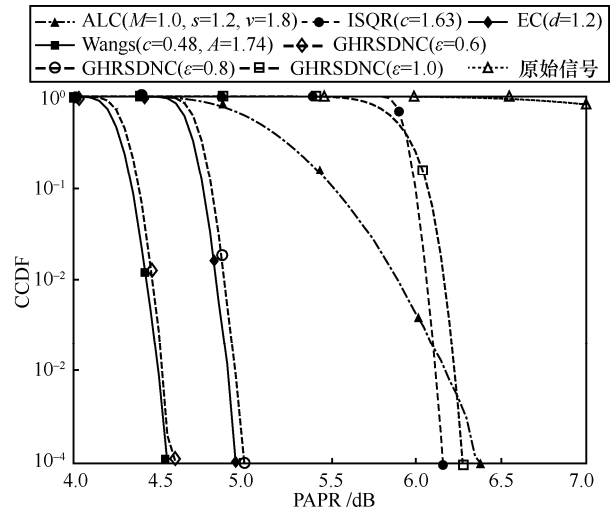


图 8 不同压扩算法的 PAPR 的 CCDF

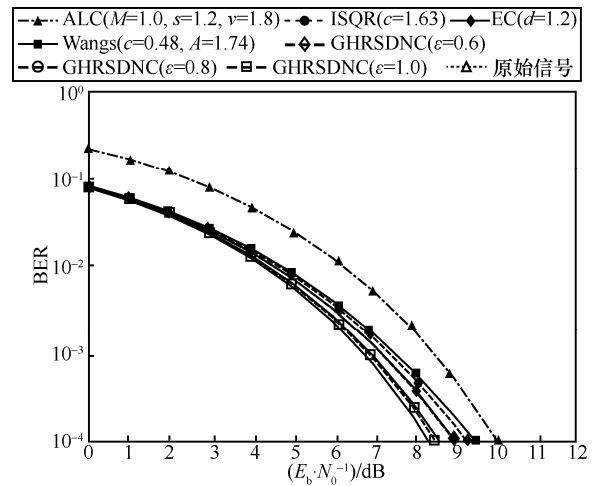


图 9 不同压扩算法的 BER 性能

图 10 展示了不同压扩算法在经过了 SSPA 以后的 BER 性能。通过图 10 可以看出，当 $\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\varepsilon=0.6$ 时，对应的最低的 E_b/N_0 为 10.8 dB，比 ALC 算法低 0.2 dB。

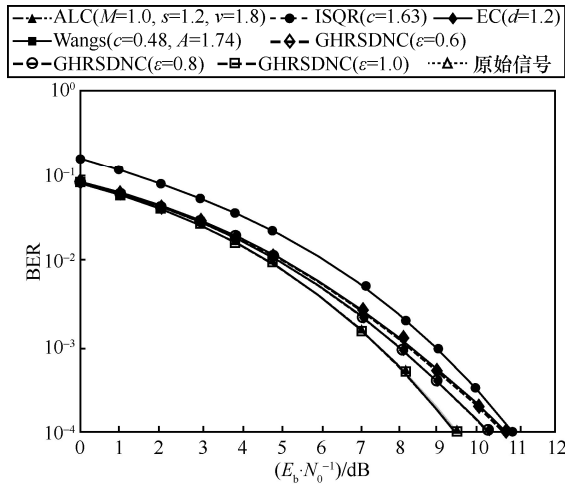


图 10 不同压扩算法经过 SSPA 后的 BER 性能

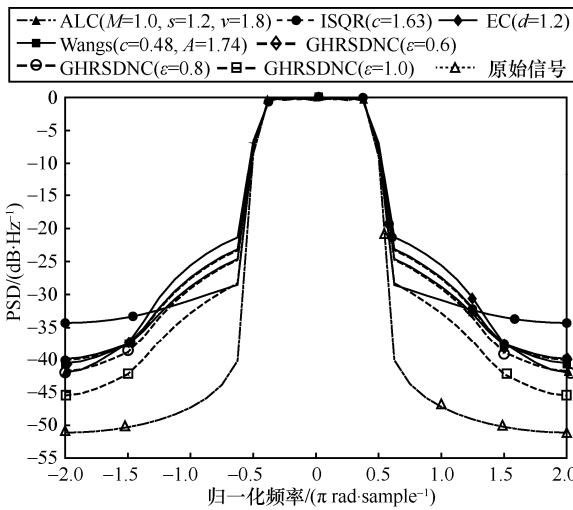


图 11 不同压扩算法的 PSD 性能

图 11 展示了不同压扩算法的 PSD 性能。通过图 11 可以看出，本文设计的压扩算法在 PSD 的性能方面具备优势。当归一化功率为 $1.0 \pi \text{ rad/sample}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.6$ 时的带外泄露功率为

-27.0 dB ，比 ALC 算法低 2.0 dB 。当归一化功率为 $2.0 \pi \text{ rad/sample}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.6$ 时的带外泄露功率为 -39.9 dB ，比 ISQR 算法低 5.0 dB 。

表 1 展示了不同压扩算法的性能比较。其中 PSD 性能表示当归一化频率为 $2.0 \pi \text{ rad/sample}$ 时，对应的带外泄露功率。通过表 1 可以看出，当 PAPR 相同时，本文压扩算法在 BER 性能、PAPR 性能和 PSD 性能方面存在优势。例如，当设计的 GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.6$ 时，与 EC 算法在 $\text{CCDF}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，对应的 PAPR 都为 4.5 dB ，但 GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.6$ 、 $\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，对应的 E_b/N_0 比 EC 算法低 0.2 dB ；在归一化频率为 $2.0 \pi \text{ rad/sample}$ 时，GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.6$ 时，对应的带外泄露功率比 EC 算法低 0.1 dB 。

5 结束语

本文设计了一种基于瑞利分布和三角函数分布相结合的非线性压扩算法抑制 OFDM 系统的 PAPR。在该算法中，不对幅度较小的信号进行压扩处理，对于幅度较大的信号，将压扩后 OFDM 信号样点的 PDF 从瑞利分布改为三角函数分布。根据概率守恒和功率守恒，可以推导出压扩函数的参数的理论表达式。仿真结果表明，本文设计的算法可以在有效降低 OFDM 信号样点的 PAPR 的基础上，确保较低的误码率和良好的 PSD 性能。例如，GHRSDNC 算法在 $\epsilon=0.8$ 、 $\text{CCDF}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，对应的 PAPR 为 5.0 dB ，此时，它在 $\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$ 时，不经过功率放大器，对应的最低的 E_b/N_0 大约为 9.0 dB 。并且，当归一化频率为 $1.0 \pi \text{ rad/sample}$ 时，GHRSDNC 算法对应的 PSD 的带外泄露功率为 -28.0 dB 。

表 1 不同压扩算法的性能比较

压扩算法	$(E_b \cdot N_0^{-1})/\text{dB}$ ($\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$, 无 SSPA)	$(E_b \cdot N_0^{-1})/\text{dB}$ ($\text{BER}=1.0 \times 10^{-4}$, 有 SSPA)	PAPR/dB ($\text{CCDF}=1.0 \times 10^{-4}$)	带外泄露功率/dB (归一化频率为 $2.0 \pi \text{ rad/sample}$)
GHRSDNC ($\epsilon=0.6$)	9.3	10.8	4.5	-39.9
GHRSDNC ($\epsilon=0.8$)	9.0	10.2	5.0	-42.0
GHRSDNC ($\epsilon=1.0$)	8.5	9.5	6.3	-45.1
Wangs ($c=0.48, A=1.74$)	9.0	10.2	4.8	-40.1
EC ($d=1.2$)	9.5	10.9	4.52	-40.0
ALC ($v=1.8, M=1.0, s=1.2$)	10.0	11.0	6.4	-42.0
ISQR ($c=1.63$)	8.6	9.5	6.1	-34.9

参考文献:

- [1] BAQUERO BARNETO C, RIIHONEN T, TURUNEN M, et al. Full-duplex OFDM radar with LTE and 5G NR waveforms: challenges, solutions, and measurements[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2019, 67(10): 4042-4054.
- [2] ZHANG J S, RAKHIMOV D, HAARDT M. Gridless channel estimation for hybrid mmWave MIMO systems via tensor-ESPRIT algorithms in DFT beamspace[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2021, 15(3): 816-831.
- [3] XIAO Z, LI S C, CHEN X C, et al. A load-balancing energy consumption minimization scheme in 5G heterogeneous small cell wireless networks under coverage probability analysis[J]. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2017, 31(7): 1759013.
- [4] 胡欣, 王刚, 王自成, 等. 射频预失真器与基带预失真算法结合对行波管功率放大器线性化改善的影响[J]. *通信学报*, 2012, 33(7): 158-163.
HU X, WANG G, WANG Z C, et al. Effect on the linearity improvement of TWTA by combining RF predistortion linearizer and digital predistortion algorithm[J]. *Journal on Communications*, 2012, 33(7): 158-163.
- [5] RAHMATALLAH Y, MOHAN S. Peak-to-average power ratio reduction in OFDM systems: a survey and taxonomy[J]. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2013, 15(4): 1567-1592.
- [6] ARMSTRONG J. Peak-to-average power reduction for OFDM by repeated clipping and frequency domain filtering[J]. *Electronics Letters*, 2002, 38(5): 246.
- [7] ABURAKHIA S A, BADRAN E F, MOHAMED D A E. Linear companding transform for the reduction of peak-to-average power ratio of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2009, 55(1): 155-160.
- [8] HU M X, WANG W, CHENG W C, et al. A generalized piecewise linear companding transform for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2020, 66(1): 170-176.
- [9] RATEB A M, LABANA M. An optimal low complexity PAPR reduction technique for next generation OFDM systems[J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 16406-16420.
- [10] XING Z T, LIU K M, RAJASEKARAN A S, et al. A hybrid companding and clipping scheme for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 61565-61576.
- [11] CUI X Y, LIU K M, LIU Y A. Novel linear companding transform design based on linear curve fitting for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Communications Letters*, 2021, 25(11): 3604-3608.
- [12] XING Z T, LIU K M, TANG B H, et al. Novel PAPR reduction scheme based on piecewise nonlinear companding transform in OFDM systems[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(8): 1757-1761.
- [13] JIANG T, YANG Y, SONG Y H. Exponential companding technique for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2005, 51(2): 244-248.
- [14] HOU J, GE J H, ZHAI D W, et al. Peak-to-average power ratio reduction of OFDM signals with nonlinear companding scheme[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2010, 56(2): 258-262.
- [15] WANG Y, WANG L H, GE J H, et al. An efficient nonlinear companding transform for reducing PAPR of OFDM signals[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2012, 58(4): 677-684.
- [16] DELMARCO S P. General closed-form family of companders for PAPR reduction in OFDM signals using amplitude distribution modification[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2014, 60(1): 102-109.
- [17] DELMARCO S P. Compander design for OFDM PAPR reduction using optimal perturbation of piecewise linear segments[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2018, 64(4): 900-908.
- [18] LIU K M, LIU Y A. Adjustable nonlinear companding transform based on scaling of probability density function for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 2021, 67(2): 524-537.
- [19] LIU K M, WANG L, LIU Y A. A new nonlinear companding algorithm based on tangent linearization processing for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *China Communications*, 2020, 17(8): 133-146.
- [20] WANG X B, TJHUNG T T, NG C S. Reduction of peak-to-average power ratio of OFDM system using a companding technique[J]. *IEEE Transactions on Broadcasting*, 1999, 45(3): 303-307.
- [21] ADEBISI B, ANOH K, RABIE K M. Enhanced nonlinear companding scheme for reducing PAPR of OFDM systems[J]. *IEEE Systems Journal*, 2019, 13(1): 65-75.
- [22] XING Z T, LIU K M, HUANG K Y, et al. Novel PAPR reduction scheme based on continuous nonlinear piecewise companding transform for OFDM systems[J]. *China Communications*, 2020, 17(9): 177-192.

[作者简介]



邢智童 (1992-), 男, 重庆人, 重庆邮电大学在站博士后, 主要研究方向为无线通信传输, 包括 PAPR 抑制、Massive MIMO-OFDM 预编码设计、抗干扰算法设计等。

李云 (1974-), 男, 四川南充人, 博士, 重庆邮电大学教授, 主要研究方向为 TCP 性能分析与改进、无线局域网、无线自组织网络、无线 Mesh 网络等。

彭德义 (1987-), 男, 湖南湘潭人, 重庆邮电大学博士生, 主要研究方向为卫星通信波束成形、预编码等。

张本思 (1995-), 男, 河南商丘人, 重庆邮电大学硕士生, 主要研究方向为卫星通信波束成形、预编码等。

刘凯明 (1978-), 男, 湖北潜江人, 博士, 北京邮电大学教授, 主要研究方向为宽带无线通信、无线自组织网络、异构网络融合、移动互联网等。

刘元安 (1963-), 男, 四川乐至人, 博士, 北京邮电大学教授, 主要研究方向为宽带移动通信技术、射频与微波器件、综合网络接入技术、移动终端与物联网等。